СЕТОЧНЫЕ СХЕМЫ С АДАПТАЦИЕЙ ШАГА ПО ВРЕМЕНИ ДЛЯ ДВУХФАЗНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА[1]

Фетисова Е.Ю.

Казанский государственный университет

1. Рассматривается задача теплопроводности с фазовым переходом в некоторой области Ω. Часть границы области считается теплоизолированной, а на другой части поддерживается постоянная температура. Внутренние источники в области отсутствуют. В каждый момент времени Ω разбивается на две подобласти, одна из которых соответствует твёрдому состоянию среды (область отрицательных температур), а вторая – жидкому (область положительных температур). Граница, разделяющая эти подобласти, – граница фазового перехода. В ходе решения задачи вычисляется распределение температур и отслеживается движение фазового перехода.

Введём обозначения: u – температура, k_1 и k_2 – коэффициенты теплопроводности. Процесс описывается уравнениями

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k_i \Delta u = 0, \quad i = 1, 2, \qquad x \in \Omega_i,$$

Ω_1 соответствует фазе с положительной температурой, а Ω_2 – фазе с отрицательной температурой. На границе фазового перехода $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ ставится условие Стефана:

$$-ls'(t) = k_1 \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l(t)} - k_2 \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l(t)},$$

где $l = const > 0$ – скрытая теплота плавления, $x = s(t)$ – уравнение границы фазового перехода.

Введём функцию энтальпии

$$S = \left\{ \frac{u}{k_1} + l,\ u > 0; \quad [0, l],\ u = 0; \quad \frac{u}{k_2},\ u < 0 \right\}, \quad l = const > 0.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект N 98-01-00200.

В новых переменных уравнение во всей области Ω примет вид

$$\frac{\partial S(u)}{\partial t} - \Delta u = 0, \qquad x \in \Omega.$$

Ниже это уравнение аппроксимировано сеточной схемой и предложен метод её решения.

2. В одномерном случае в качестве области Ω выбирается отрезок [0,1]. Предполагается, что на начальный момент времени температура внутри Ω известна, и в области имеется одна точка фазового перехода. На границе области ставится условие Дирихле

$$u(0) = u_0 > 0, \qquad u(1) = u_1 < 0.$$

На $[0, 1]$ строится сетка с шагом $h = N^{-1}$. Пусть $\omega = \{x = ih, i = 1, ..., N-1\}$ – множество внутренних узлов сетки. Шаг по времени выбирается следующим образом.

Область Ω разбивается на три непересекающиеся подобласти Ω_1, Ω_2 и Ω_3. Подобласть Ω_2 содержит границу фазового перехода, в Ω_1 температура положительная, а в Ω_3 – отрицательная. В подобластях Ω_1 и Ω_3 берётся крупный шаг τ_1, а в "центральной" подобласти Ω_2 – мелкий шаг $\tau = \tau_1/p$, где p – целое число, характеризующее измельчение. В процессе решения задачи центральная область будет двигаться в зависимости от движения фазового перехода. В каждой подобласти строится разностная аппроксимация задачи. Обозначая через y сеточную функцию, имеем

$$\begin{cases} S(y)_{\bar{t}} - y_{x\bar{x}} = 0, \quad x \in \omega, \\ y_0 = u\,(0)\,, \\ y_N = u\,(1)\,, \end{cases}$$

где $S(y)_{\bar{t}}$ означает конечную разность по времени с шагами τ или τ_1 в зависимости от подобласти. Значения в них сеточных функций определяются линейной интерполяцией значений в тех же пространственных точках на временных слоях t и $t + \tau_1$. Поточечная запись задачи выглядит следующим образом:

$$\frac{a_i y_i}{\tau} + \frac{lH_i}{\tau} + Ay_i = \frac{1}{\tau}\check{\xi}_i, \tag{1}$$

$$y_0 = u\,(0)\,, \qquad y_N = u\,(1)\,,$$

где
$$a_i = \begin{cases} \alpha, & i \geq j+1 \\ \beta, & i \leq j \end{cases}, \qquad H_i = \begin{cases} 0, & i \geq j+1 \\ 1, & i \leq j \end{cases},$$
а j – номер такого узла, что граница фазового перехода находится в промежутке $[jh, (j+1)h)$. Функция ξ определяется по следующим формулам: если фазовый переход попадает в узел, то полагается $\xi_j = \check{\xi} - \tau(Ay)_j$, иначе $\xi_j = S(y_j)$.

Назовем "висячими" узлы сетки, которые являются граничными для Ω_2 в интервале $(t, t+\tau_1)$. Вся сложность процесса решения заключается в определении значений y в "висячих" узлах. Для этого применяются два способа, описание которых будет приведено ниже в ходе описания итерационных процессов.

а) При вычислении значений y на временном слое $t+\tau_1$ будут выполняться следующие действия: на первом этапе задача решается с большим шагом τ_1 на всей области Ω. На втором этапе значения в "висячих точках" определяются линейной интерполяцией значений y с больших временных слоев t и $t+\tau_1$. На следующем этапе решается задача в средней подобласти с мелким шагом по времени. Поскольку в подобластях Ω_1 и Ω_3 рассматриваемая задача является линейной, применяется метод прогонки. Для решения нелинейной сеточной задачи в подобласти Ω_2 применяется прямой метод, упомянутый в [1]. Проверка точности осуществляется из уравнения, записанного для точек j_1 и j_2, которые являются граничными для центральной подобласти Ω_2 на временном слое $t+\tau_1$. Если достигнутая точность нас устраивает, то осуществляется переход к следующему временному слою $(t+\tau_1)$. Если же это не так, то из тех же уравнений заново находятся значения y в точках j_1 и j_2. Правой и левой прогонками находятся значения y в подобластях Ω_1 и Ω_3. После этого процесс повторяется, начиная со второго этапа.

б) При использовании второго способа итерационный процесс строится таким же образом, различие заключается лишь в проверке точности и пересчете значений y в точках j_1 и j_2. На границе подобласти Ω_2 задается условие для потоков λ
$$\frac{\partial u}{\partial n} = \lambda, \tag{2}$$
где n – единичный вектор внешней нормали. Обозначим через $\Lambda(t)$ поток через границу Ω_2 со стороны Ω_1, а через $\lambda(t)$ – поток через границу

Ω_2 со стороны Ω_2. Запишем выражение для потоков, прошедших через границы Ω_2 за промежуток времени от t до $t+\tau_1$:

$$\int_t^{t+\tau_1} \Lambda(t)dt = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{t+i\tau}^{t+(i+1)\tau} \lambda(t)dt.$$

Используя для вычисления интегралов квадратурные формулы трапеций, получаем

$$\Lambda(t) + \Lambda(t+\tau_1) = \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1} \left(\lambda(t+i\tau) + \lambda(t+(i+1)\tau)\right). \qquad (3)$$

Тогда разностная аппроксимация условия (2) принимает вид

$$\frac{S(y_{j_1}) - \hat{S}(y_{j_1})}{\tau_1} + \frac{2}{h} y_{j_1\bar{x}} = -\frac{2}{h}\Lambda(t+\tau_1),$$

$$\frac{S(y_{j_1}) - \hat{S}(y_{j_1})}{\tau} - \frac{2}{h} y_{j_1 x} = \frac{2}{h}\lambda(t+\tau).$$

Выразив $\Lambda(t+\tau_1)$ и $\lambda(t+\tau)$, ..., $\lambda(t+p\tau)$ через y и подставив в равенство (3), получим выражение для вычисления погрешности и пересчета y в точке j_1. Аналогичным образом записывается условие и для второй граничной точки j_2 области Ω_2.

3. В двумерном случае в качестве области Ω выберем квадрат [0,1] x [0,1]. Задача имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(u)}{\partial t} - \Delta u = 0, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, & x_2 = 0, \quad x_2 = 1, \\ u = f_1(x), & x_1 = 0, \\ u = f_2(x), & x_1 = 1. \end{cases}$$

Как и в одномерном случае, область разбивается на три части (Ω_1, Ω_2 и Ω_3): область положительных температур, область отрицательных температур и область, содержащая фазовый переход. Строится сетка с шагом $h = N^{-1}$ по осям x_1 и x_2, где N – размерность сетки, большим шагом τ_1 в крайних подобластях и мелким шагом $\tau = \tau_1/p$ в центральной подобласти, содержащей фазовый переход. Центральная область рассматривается двух видов: прямоугольная и с границами, повторяющими линию фазового перехода. И она в ходе задачи также будет двигаться в зависимости от движения фазовой границы. Строится разностная аппроксимация. В случае прямоугольной области Ω_3 измельчение временного шага аналогично одномерному случаю. При решении применяются описанные в п.2 способы вычисления погрешности и пересчёта значений в точках стыковки подобластей. Итерационный процесс реализуется точно так же, только вместо прогонки для решения сеточных задач в подобластях Ω_i применяется метод верхней релаксации. Во втором случае реализуется только первый способ, когда для вычисления погрешности и пересчета используются уравнения, записанные для температуры.

Выводы. Второй способ в отличие от первого требует хранить больше переменных, но в одномерном случае это практически не ощущается, тогда как выигрыш во времени весьма существенный. Для достижения одной и той же точности во втором способе делается вдвое-втрое меньше итераций, чем в первом.

В двумерном случае наиболее быстрым по сходимости оказался второй метод. Количество внешних итераций можно уменьшить за счет подбора итерационного параметра ω для метода верхней релаксации и изменения количества внутренних итераций. Экспериментальным путём было выяснено, что для более быстрой сходимости ω следует выбирать из интервала $(0.4, 0.7)$, а количество внутренних итераций находилось в пределах от 1 до 4.

Литература

1. *Лапин А.В., Соловьев Д.О.* Итерационные схемы расщепления для сеточной аппроксимации двухфазной задачи Стефана // Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач. Материалы Всероссийского семинара. Казань - 1996. – Казанский фонд Математика, 1996. – С. 77-79.